

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ II и высших порядков.
(Линейные, с постоянными коэффициентами и специальной функцией в правой части).**

Дифференциальные уравнения II порядка.

Общий вид: $ay'' + by' + cy = f(x)$,

где $f(x)$ - специального вида.

Общее решение уравнения определяется формулой:

$$y = y_0 + y^*.$$

Если в правой части уравнения сумма из нескольких функций, то формула принимает вид:

$$y = y_0 + y_1^* + y_2^* + \dots$$

Решения находятся отдельно для каждой из частей уравнения:

y_0 - общее решение однородного уравнения ($f(x) \equiv 0$) (решение для левой части уравнения);

y^* - частное решение, подобранное согласно виду $f(x)$ (решение для правой части уравнения).

1. Левая часть.

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Записывается и решается характеристическое уравнение:

$$ak^2 + bk + c = 0 \quad (y'' \rightarrow k^2; y' \rightarrow k; y \rightarrow 1)$$

Характеристические числа – решения, получаемые по формулам:

$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}; \quad D = b^2 - 4ac.$$

Решение y_0 выписывается по формуле согласно виду $k_{1,2}$:

$$y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

1) $k_1 \neq k_2 \ (D > 0)$	$y_0 = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
2) $k_1 = k_2 \ (D = 0)$	$y_0 = C_1 e^{kx} + C_2 x \cdot e^{kx}$
3) $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ ($D < 0; -1 = i^2$)	$y_0 = e^{\alpha x} \cdot (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

2. Правая часть.

Возможные виды $f(x)$:

$$(1). f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$$

$$(2). f(x) = e^{\alpha x} \cdot (P_n(x) \cdot \cos \beta x + Q_m(x) \cdot \sin \beta x).$$

Из функции $f(x)$ выписываем два числа:

$$\alpha \rightarrow \text{из } e^{\alpha x}; \quad \beta \rightarrow \text{из } \cos \beta x, \sin \beta x;$$

составляем число $\gamma = \alpha \pm i\beta$, сравниваем γ с k_1, k_2 .

r - количество совпадений ($r = 0, 1, 2$ для уравнения II порядка).

Решение y^* выписывается по формуле:

$$y^* = x^r \cdot e^{\alpha x} \cdot [P_l^*(x) \cdot \cos \beta x + Q_l^*(x) \cdot \sin \beta x].$$

При этом для $f(x)$ вида (2) $\cos \beta x$ и $\sin \beta x$ всегда выписываются в паре, порядок многочлена при них выбирается максимальный, т.е. $l = \max\{n, m\}$.

Неопределенные коэффициенты в частном решении определяются путем нахождения $y^{*'}; y^{*''}$ и подстановки выражений для функции и её производных внутрь исходного уравнения.

Дифференциальные уравнения высших порядков.

Общий вид: $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$.

Общее решение уравнения определяется формулой: $y = y_0 + y^*$.

Построение y_0 - общего решения однородного уравнения:

характеристические числа k_j – корни многочлена n -ого порядка:

$$(a_0 \cdot k^n + a_1 \cdot k^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot k + a_n \cdot 1).$$

✓ каждому действительному корню k_j соответствует частное решение вида $y_j = e^{k_j x}$;

✓ в случае кратных действительных корней каждое последующее решение домножается на x ;

✓ в случае комплексно-сопряженных корней $k_{j,j+1} = \alpha \pm i\beta$ образуется пара решений $y_{j,j+1} = e^{\alpha x} \cdot (C_j \cos \beta x + C_{j+1} \sin \beta x)$.

Общее решение однородного уравнения получается по формуле:

$$y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_j y_j + \dots + C_n y_n.$$